Marius Burtea **Georgeta Burtea**
Simona Anton, Corneliu Mănescu Avram, Cristina Ligia Dan, Daniela Diaconu, Ion Dogaru, Carmen Georgescu, Diana Mihalcea, Elena Necula, Gabriel Necula, Elena Popescu, Cristian Radu, Cornel Rădulescu, Daniela Soare, Gabriela Stroe

CLASA a XII-a

MATEMATICĂ

Probleme și exerciții
Teste

semestrul I

- grupuri
- inele și corpuri
- primitive

servicii, resurse, tehnic

CAMPION

CUPRINS

Elemente de algebră 5
Capitolul I. GRUPURI 5
1. LEGI DE COMPOZIŢIE PE O MULŢIME 5
1.1. Legi de compoziţie. Parte stabilă 5
1.2. Proprietatea de comutativitate şi asociativitate 11
1.3. Element neutru. Elemente simetrizabile 17
Teste de evaluare 22
2. NOŢIUNEA DE GRUP. EXEMPLE 23
3. MORFISME ŞI IZOMORFISME DE GRUPURI 29
Teste de evaluare 36
Capitolul II. INELE ŞI CORPURI 39
1. Noţiunea de inel. Exemple de inele 39
2. Corpuri. Exemple de corpuri 46
Teste de evaluare 50
Elemente de analiză matematică 52
Capitolul I. PRIMITIVE 52
1. Primitivele unei funcţii. Integrala nedefinită a unei funcţii continue, proprietăţi 52
2. Primitive uzuale 60
3. Metoda de integrare prin părţi 65
4. Metoda schimbării de variabilă 70
Teste de evaluare 78
Indicaţii şi răspunsuri 80
Bibliografie 98

CAPITOLUL I. GRUPURI

1. LEGI DE COMPOZIŢIE PE O MULŢIME

1. 1. LEGI DE COMPOZIŢIE. PARTE STABILĂ

Breviar teoretic

Fie M o mulţime nevidă.

- O funcţie $\varphi : M \times M \to M$ se numeşte **lege de compoziţie** (**operaţie algebrică**) pe mulţimea M.
- Elementul $\varphi(x, y)$ se numeşte compusul lui x cu y.

Adunarea şi înmulţirea modulo n.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a \in \mathbb{Z}$.

- Numărul natural r care reprezintă restul împărţirii lui a la n se notează $a \bmod n$ şi se numeşte **restul modulo *n*** al numărului a.

Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ se definesc operaţiile algebrice:

- $\oplus : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ a \oplus b = (a+b) \bmod n$, numită **adunarea modulo *n***.
- $\odot : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ a \odot b = (a \cdot b) \bmod n$, numită **înmulţirea modulo *n***.

Adunarea şi înmulţirea claselor de resturi modulo n

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Pentru $a \in \mathbb{Z}$ notăm $\hat{a} = \{a + nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$, clasa lui a modulo n.

- Dacă $r = a \bmod n$, atunci $\hat{a} = \{r + nk \mid k \in \mathbb{Z}\} = \hat{r}$.
- Mulţimea $\mathbb{Z}_n = \left\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, ..., \widehat{n-1}\right\}$ se numeşte **mulţimea claselor de resturi modulo *n*.**

Pe mulţimea $\mathbb{Z}_n$ se definesc operaţiile algebrice:

- $"+" : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n,\ \hat{a} + \hat{b} = \widehat{a \oplus b}$, numită **adunarea claselor de resturi modulo *n*.**
- $"\cdot" : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n,\ \hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{a \odot b}$, numită **înmulţirea claselor de resturi modulo *n*.**

- O submulţime $S \subset M$ se numeşte **parte stabilă a lui *M*** în raport cu operaţia algebrică $"\circ"$, dacă $\forall\ x, y \in S$, implică $x \circ y \in S$.

  În cazul în care $S = M$ se spune că M este parte stabilă în raport cu operaţia $"\circ"$.

Exerciţii şi probleme rezolvate

1. Pe mulţimea $M = \{1, 2, 3, 4\}$ se defineşte operaţia algebrică $"\circ"$ astfel: $x \circ y = |x - y| + 1$, $\forall\ x, y \in M$.

a) Să se calculeze: $2 \circ 3,\ 3 \circ 4,\ 4 \circ 4$.

b) Să se calculeze: $(2 \circ 3) \circ 4$ şi $2 \circ (3 \circ 4)$.

Soluție

a) Avem: $2 \circ 3 = |2-3|+1 = 1+1 = 2$, $3 \circ 4 = |3-4|+1 = 1+1 = 2$ și $4 \circ 4 = |4-4|+1 = 0+1 = 1$.

b) Se obține: $(2 \circ 3) \circ 4 = (|2-3|+1) \circ 4 = (1+1) \circ 4 = 2 \circ 4 = |2-4|+1 = 2+1 = 3$ și
$2 \circ (3 \circ 4) = 2 \circ (|3-4|+1) = 2 \circ (1+1) = 2 \circ 2 = |2-2|+1 = 0+1 = 1$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se definește legea de compoziție "$\perp$" astfel: $x \perp y = 2xy + 3x + 3y - 1$, $\forall\, x, y \in \mathbb{Z}$.

a) Să se calculeze: $2 \perp 1$, $(-3) \perp (-5)$ și $2 \perp (-4)$.

b) Să se rezolve ecuația $2 \perp x = 12$.

Soluție

a) Avem: $2 \perp 1 = 2 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 1 = 4 + 6 - 3 + 1 = 12$; $(-3) \perp (-5) = 2 \cdot (-3) \cdot (-5) + 3 \cdot (-3) +$
$+ 3 \cdot (-5) - 1 = 30 - 9 - 15 - 1 = 5$; $2 \perp (-4) = 2 \cdot 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 2 + 3 \cdot (-4) - 1 = -16 + 6 - 12 - 1 = -23$.

b) Se obține că $2 \perp x = 2 \cdot 2 \cdot x + 3 \cdot 2 + 3 \cdot x - 1 = 7x + 5$. Rezultă ecuația $7x + 5 = 12$ cu soluția $x = 1 \in \mathbb{R}$.

3. Pe mulțimea $M_2(\mathbb{R})$ se definește operația algebrică "$\perp$", astfel:
$A \perp B = A \cdot B + A + B$, $\forall\, A, B \in M_2(\mathbb{R})$.

a) Să se calculeze: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

b) Să se determine matricea A știind că $A \perp \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Soluție

a) Avem: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ -1 & 22 \end{pmatrix}.$$

b) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Avem: $A \perp \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+1 & b+1 \\ c & d+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+1 & a+2b+1 \\ 2c & c+2d+1 \end{pmatrix}.$$

Se obține egalitatea de matrice: $\begin{pmatrix} 2a+1 & a+2b+1 \\ 2c & c+2d+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ și rezultă ecuațiile $2a+1=3$, $a+2b+1=4$, $2c=2$, $c+2d+1=4$ cu soluțiile $a=1$, $b=1$, $c=1$, $d=1$. Așadar $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Fie $M = \{0, 1, 2, 3\}$ și legea de compoziție pe M, definită astfel: $x \circ y = \min(x, y)$.

a) Să se calculeze: $2 \circ 3$, $0 \circ 3$, $3 \circ 2$.

b) Să se alcătuiască tabla operației "$\circ$".

Soluţie

a) Avem: $2\circ 3=\min(2,3)=2,\ \ 0\circ 3=\min(0,3)=0,\ \ 3\circ 2=\min(3,2)=2.$

b) Tabla operaţiei:

∘	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	1	1
2	0	1	2	2
3	0	1	2	3

5. Pe mulţimea $I=[2,+\infty)$ se consideră operaţia algebrică "$\circ$" definită astfel:
$x\circ y=xy-2x-2y+6,\ \ \forall\, x, y\in I.$

a) Să se arate că $x\circ y=(x-2)(y-2)+2,\ \forall\, x, y\in I.$

b) Să se arate că I esete parte stabilă în raport cu legea "$\circ$".

Soluţie

a) Avem: $(x-2)(y-2)+2=xy-2x-2y+4+2=xy-2x-2y+6=x\circ y.$

b) Fie $x, y\in I.$ Rezultă că $x, y\in[2,+\infty)$, adică $x\geq 2,\ y\geq 2$ sau $x-2\geq 2,\ y-2\geq 0.$ Prin înmulţire se obţine că $(x-2)\cdot(y-2)\geq 0,$ de unde rezultă că $(x-2)(y-2)+2\geq 2,$ deci $x\circ y\geq 2$ sau $x\circ y\in I.$

6. Fie $M=\left\{A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ |\, a\in\mathbb{R}\right\}$ şi operaţia "$\perp$" pe M, definită astfel:

$A(a)\perp A(b)=A(a)\cdot A(b)+A(a)+A(b)-2I_2.$

a) Să se calculeze $A(2)\cdot A(3)$ şi $A(2)\perp A(3).$

b) Să se calculeze $A(a)\perp A(b).$

c) Să se arate că M este parte stabilă în raport cu operaţia "$\perp$".

Soluţie

a) Avem: $A(2)=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ A(3)=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$ Rezultă că $A(2)\cdot A(3)=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 10\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

şi $A(2)\perp A(3)=A(2)\cdot A(3)+A(2)+A(3)-2I_2=\begin{pmatrix}1 & 10\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}3 & 20\\ 0 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 20\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$

b) Fie $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2a\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ A(b)=\begin{pmatrix}1 & 2b\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$ Rezultă că $A(a)\perp A(b)=\begin{pmatrix}1 & 2a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2b\\ 0 & 1\end{pmatrix}+$

$+\begin{pmatrix}1 & 2a\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2b\\ 0 & 1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2a+2b\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 2a+2b\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4a+4b\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$

c) S-a obţinut că $A(a)\perp a(b)=\begin{pmatrix}1 & 4a+4b\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2(2a+2b)\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$ Se observă că

$\begin{pmatrix} 1 & 2(2a+2b) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A(2a+2b)$, deci are loc egalitatea $A(a) \perp A(b) = A(2a+2b) \in M$. Aşadar M este parte stabilă în raport cu operaţia "$\perp$".

7. Să se calculeze:

a) $7 \bmod 3,\ 8 \bmod 5,\ 18 \bmod 7$.

b) $8 \oplus 11$ şi $(-3) \oplus 23$, dacă $n = 5$.

c) $5 \odot 7$ şi $9 \odot (-8)$, dacă $n = 10$.

Soluţie

a) $7 \bmod 3 = 1$, deoarece $7 = 3 \cdot 2 + 1$;
$8 \bmod 5 = 3$, deoarece $8 = 5 \cdot 1 + 3$;
$18 \bmod 7 = 4$, deoarece $18 = 7 \cdot 2 + 4$.

b) $8 \oplus 11 = (8+11) \bmod 5 = 19 \bmod 5 = 4$, deoarece $19 = 5 \cdot 3 + 4$;
$(-3) \oplus 23 = (-3+23) \bmod 5 = 20 \bmod 5 = 0$, deoarece $20 = 5 \cdot 4 + 0$.

c) $5 \odot 7 = (5 \cdot 7) \bmod 10 = 35 \bmod 10 = 5$, deoarece $35 = 3 \cdot 10 + 5$;
$9 \odot (-8) = (-9 \cdot 8) \bmod 10 = (-72) \bmod 10 = 8$, deoarece $-72 = 10 \cdot (-8) + 8$.

8. Să se calculeze:

a) $\hat{3}+\hat{5},\ \hat{9}+\widehat{11},\ \hat{7}+\hat{9}$ în $\mathbb{Z}_8$.

b) $\hat{3} \cdot \hat{5},\ \hat{4} \cdot \hat{2},\ \hat{6} \cdot \hat{7}$ în $\mathbb{Z}_{8.}$

Soluţie

a) $\hat{3}+\hat{5} = \widehat{(3+5) \bmod 8} = \widehat{8 \bmod 8} = \hat{0}$;

$\hat{9}+\widehat{11} = \widehat{(9+11) \bmod 8} = \widehat{20 \bmod 8} = \hat{4}$;

$\hat{7}+\hat{9} = \widehat{(7+9) \bmod 8} = \widehat{16 \bmod 8} = \hat{0}$.

b) $\hat{3} \cdot \hat{5} = \widehat{(3 \cdot 5) \bmod 8} = \widehat{15 \bmod 8} = \hat{7}$;

$\hat{4} \cdot \hat{2} = \widehat{(4 \cdot 2) \bmod 8} = \widehat{8 \bmod 8} = \hat{0}$;

$\hat{6} \cdot \hat{7} = \widehat{(6 \cdot 7) \bmod 8} = \widehat{42 \bmod 8} = \hat{2}$.

9. Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ se definesc operaţiile algebrice $x * y = x + y - 3$ şi $x \circ y = (x-3)(y-3)+3,\ \forall\, x, y \in \mathbb{Z}$.

a) Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuaţia $x \circ x = x * x$.

b) Să se determine $a \in \mathbb{Z}$, astfel încât $x \circ a = 3,\ \forall\, x \in \mathbb{Z}$.

c) Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x * (y+1) = 4 \\ (x-y) \circ 1 = 5 \end{cases}$, în $\mathbb{Z}$.

Soluţie

a) Ecuaţia se scrie $(x-3)(x-3)+3 = x + x - 3$ sau, după reduceri, $x^2 - 8x + 15 = 0$ cu soluţiile $x \in \{3, 5\}$.

b) Avem $x \circ a = 3 \Rightarrow (x-3)(a-3)+3=3$ sau $(x-3)(a-3)=0$, deci $a-3=0$ şi $a=3$.

c) Se obţine succesiv: $\begin{cases} x+(y+1)-3=4 \\ (x-y-3)(1-3)+3=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ x-y-3=-1 \end{cases}$ şi prin metoda reducerii rezultă $2x=8$ cu soluţia $x=4$. Din prima ecuaţie se găseşte că $4+y=6$, deci $y=2$.

Exerciţii şi probleme propuse

Exersare

1. Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ se defineşte operaţia algebrică $x \circ y = x+y+a$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$.

a) Determinaţi $a \in \mathbb{Z}$ pentru care $7 \circ 3 = 11$;

b) Pentru $a=1$ rezolvaţi ecuaţia $(x+1)\circ(x+11)=19$;

c) Pentru $a=-1$ rezolvaţi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x \circ y = 0 \\ (2x)\circ(y+1)=10 \end{cases}$.

2. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se definesc operaţiile algebrice $x \circ y = x+y-17$ şi $x \perp y = xy+x+y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) $(2\circ 3)\perp(3\circ 4)$;

b) Rezolvaţi ecuaţiile $x\circ(3x+11)=8$ şi $(2x)\perp(x+1)=19$;

c) Rezolvaţi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x\circ(y+1)=0 \\ x\perp(y+1)=89 \end{cases}$.

3. Pe mulţimea $M=\{0,1,2,3\}$ se defineşte legea de compoziţie $x \perp y = \min(x,y)$, $\forall x, y \in M$.

a) Calculaţi $(2\perp 3)\perp 1$ şi $2\perp(3\perp 1)$;

b) Alcătuiţi tabela operaţiei "$\perp$";

c) Arătaţi că M este parte stabilă în raport cu legea "$\perp$".

4. Fie mulţimea $M=\left\{A(X)=\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x\in\mathbb{R}\right\}$.

a) Rezolvaţi în M ecuaţia $X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

b) Demonstraţi că mulţimea M este parte stabilă a mulţimii $M_2(\mathbb{C})$ în raport cu înmulţirea matricelor;

c) Calculaţi $(A(1))^{2010}$.

5. Pe mulţimea $\mathbb{Z}_5$ se defineşte operaţia algebrică $x\circ y = x+\hat{2}y+\hat{3}$, $\forall x, y\in\mathbb{Z}_5$.

a) Calculaţi $\hat{2}\circ\hat{3}$ şi $(\hat{2}+\hat{1})\circ(\hat{3}+\hat{4})$;

b) Alcătuiţi tabla operaţiei "$\circ$";

c) Arătaţi că mulţimea $\mathbb{Z}_5$ este parte stabilă în raport cu legea "$\circ$";

d) Să se determine $x, y\in\mathbb{Z}_5$ pentru care $x\circ y=\hat{1}$.

6. Pe $\mathbb{R}$ se definește operația $x * y = xy + 3x + 3y + 6$.
Demonstrați că $G = (-3, \infty)$ este o parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu "$*$".

7. Fie $H = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ și $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 + y_2)$ o operație definită pe H.
Stabiliți dacă H este parte stabilă în raport cu "$*$".

8. Pe mulțimea $A = \{0,1,2,3\}$ se definește operația "$\perp$" prin $x \perp y =$ restul împărțirii lui $(x+1)^{y+1}$ prin 4.
Demonstrați că A este parte stabilă a lui $\mathbb{N}$ în raport cu "$\perp$".

9. Fie $G = (0, \infty) - \{1\}$ și $x \circ y = x^{2\ln y}$ o operație definită pe G.
Demonstrați că G este o parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu "$\circ$".

10. Determinați valoarea parametrului real m astfel încât intervalul $(2, \infty)$ să fie parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu operația "$*$" definită prin $x * y = xy - 2x - 2y + 2m - 1$.

Aprofundare

11. Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & \frac{5y}{3} \\ 3y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Q}, x^2 - 5y^2 = 1 \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$. Demonstrați că G este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

12. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și mulțimea $H = \{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

Stabiliți dacă H este o parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor. Alcătuiți tabla operației.

13. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ și mulțimea $H = \left\{ A_x = \begin{pmatrix} 1 & ax & bx^2 - cx \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$. Determinați $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât H să fie parte stabilă a lui $M_3(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

14. Fie mulțimea $F = \{ f_{m,n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f_{m,n} = mx + n,\ m, n \in \mathbb{R},\ m \neq 0 \}$.
Studiați dacă F este parte stabilă în raport cu operația de compunere a funcțiilor.

15. Fie $\alpha \in \mathbb{N}$ și $H = \{ a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q},\ a^2 - \alpha b^2 = 1 \}$.
Determinați valoarea lui α pentru care H este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu înmulțirea.

16. Se consideră mulțimea $G = \{ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^2 - 3y^2 = 1 \}$ și operația $(x, y) * (z, t) = (xz + 3yt, xt + yz)$. Să se demonstreze că $\forall (x, y), (z, t) \in G$, rezultă că $(x, y) * (z, t) \in G$.

17. Se consideră pe $\mathbb{R}$ operaţia definită prin $x * y = xy - 4x - 4y + 20, (\forall) x, y \in \mathbb{R}$ şi mulţimea $G = (5, \infty)$.

a) Să se demonstreze că G este o parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu "$*$";

b) Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x * y = z \\ y * z = x \\ z * x = y \end{cases}$.

18. Pe $\mathbb{Z}$ se defineşte legea de compoziţie $x \perp y = x + y + a, (\forall) x, y \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{Z}$.

a) Determinaţi $a \in \mathbb{Z}$ pentru care $\mathbb{Z}$ este parte stabilă în raport cu legea "$\perp$";

b) Determinaţi $A = \left\{ a \in \mathbb{Z} \mid \underbrace{3 \perp 3 \perp \ldots \perp 3}_{50 \text{ ori}} = 52 \right\}$.

19. Pe mulţimea $\mathbb{C}$ a numerelor complexe se defineşte legea de compoziţie $z_1 \perp z_2 = z_1 z_2 - z_1 - z_2 + 2, (\forall) z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

a) Calculaţi $E = (1 - 2i) \perp (1 + i) \perp (-i)$;

b) Demonstraţi că $\mathbb{C}$ este parte stabilă în raport cu legea dată.

20. Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ se defineşte legea de compoziţie $x \perp y = 2xy + 3(x + y) + 3, (\forall) x, y \in \mathbb{Z}$.

Determinaţi $A = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid (x - 1) \perp y = 6, x \perp (y + 1) = 16\}$.

21. Fie $G = (0, \infty) \setminus \{1\}$. Pe G se defineşte legea de compoziţie $x * y = x^{\ln \sqrt{y}}, (\forall) x, y \in G$.

Rezolvaţi ecuaţia $x * x * \ldots * x = e^2$, unde e reprezintă baza logaritmului natural.

1. 2. PROPRIETATEA DE COMUTATIVITATE ŞI ASOCIATIVITATE

Breviar teoretic

Fie M o mulţime nevidă şi "$\circ$" o lege de compoziţie pe M.

- Legea de compoziţie "$\circ$" este **comutativă** dacă $x \circ y = y \circ x, \forall x, y \in M$.
- Legea de compoziţie "$\circ$" este **asociativă** dacă $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in M$.

Exerciţii şi probleme rezolvate

1. Să se studieze comutativitatea legii de compoziţie "$\perp$" pe mulţimea M, în cazurile:

a) $M = \mathbb{R}, x \perp y = x \cdot (2 - y) + 2y$;

b) $M = \mathbb{Q}, x \perp y = 3x + 4y - 3$;

c) $M = \mathbb{Z}, x \perp y = |x - y|$.

Soluţie

a) Avem: $y \perp x = y(2 - x) + 2x = 2x + 2y - xy$ şi $x \perp y = x(2 - y) + 2y = 2x - xy + 2y =$ $= 2x + 2y - xy$. Aşadar $x \perp y = y \perp x, \forall x, y \in M$, deci legea este asociativă.